O funkcyjach całkowitych symetrycznych

Napisał

F. Mertens.

Zamierzam dowieść nowym sposobem głównych własności funkcyj całkowitych symetrycznych, tak n zmiennych, jak i n grup złożonych z tej samej liczby zmiennych.

1.

Twierdzenie.

„Funkcyja całkowita F zmiennych

$$x, y, u, v, w, \ldots \qquad (1)$$

o spółczynnikach całkowitych, jednorodna tak co do x, y, jako też co do u, v i tożsamościowo znikająca za podstawieniem $x = u$, $y = v$, podzielną jest algebraicznie przez $xv - yu$ a iloraz znowu posiada spółczynniki całkowite.“

Oznaczmy funkcyję F, aby uwydatnić jej zawisłość od zmiennych x, y, przez $F(x, y)$ a rząd jej co do tychże zmiennych przez m. Z przypuszczonej jednorodności wynika tożsamość

$$v^m F(x, y) = F(vx, vy).$$

Jeżeli położymy

$$vx - uy = w$$

i wyrażenie

$$F(vx, vy) = F(w + uy, vy)$$

rozwiniemy według potęg ilości w, to otrzymamy wyrażenie kształtu

$$F(uy, vy) + w F_1 + w^2 F_2 + \dots,$$

gdzie

$$F_1, F_2, \dots$$

są funkcyjami całkowitemi o spółczynnikach całkowitych zmiennych (1)

Jest zaś tożsamościowo

$$F(uy, vy) = y^m F(u, v)$$

a według założenia

$$F(u, v) = 0;$$

mamy tedy

$$F(vx, vy) = w F_1 + w^2 F_2 + \dots$$

czyli

(2) $$v^m F = (xv - yu) \,.\, G,$$

jeżeli położymy

$$F_1 + w F_2 + \dots = G.$$

Wyrażenie G musi być podzielnem przez v. Położywszy bowiem w tożsamości (2) $v = 0$, otrzymujemy

$$0 = - uyG;$$

G musi więc zniknąć dla $v = 0$. Położywszy tedy $G = v G_1$, mamy

$$v^{m-1} F = (xv - yu) G_1.$$

Jeżeli $m - 1$ jeszcze nie $= 0$, to w ten sam sposób wnioskujemy, że G_1 musi być podzielnem przez v. Wnioskując tak dalej, widzimy, że G podzielnem być musi przez v^m i że położyć można

$$G = v^m Q$$

$$F = (xv - yu) Q.$$

2.

Niechaj x, y, oraz $x_1, x_2, \dots x_n, y_1, y_2, \dots y_n$ oznaczają dowolne zmienne, i połóżmy

$$(xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2) \dots (xy_n - yx_n) = f(x, y)$$

$$f(x, y) = (xy_k - yx_k) f_k(x, y)$$

$$f_1(x_1, y_1) f_2(x_2, y_2) \dots f_n(x_n, y_n) = Z$$

$$Z = f_k(x_k, y_k) Z_k$$

$$P = (x_1 y_2 - x_2 y_1)(x_1 y_3 - x_3 y_1) \dots (x_1 y_n - y_1 x_n)$$

$$(x_2 y_3 - x_3 y_2) \dots (x_2 y_n - y_2 x_n)$$

$$\dots$$

$$(x_{n-1} y_n - y_{n-1} x_n)$$

$$P = f_k(x_k, y_k) P_k$$

tedy funkcyja

$$x^a y^b f_k(x_k, y_k) - x_k^a y_k^b f_k(x, y),$$

w której przyjmujemy $a + b = n - 1$, jest całkowitą i jednorodną tak co do x, y, jako też co do x_k, y_k i znika identycznie za podstawieniem $x = x_k$, $y = y_k$. Musi więc być podzielną przez $xy_k - yx_k$ i położyć możemy dla $k = 1, 2, \dots n$

$$x^a y^b f_1(x_1, y_1) - x_1^a y_1^b f_1(x, y) = Q_1 (xy_1 - yx_1)$$

$$x^a y^b f_2(x_2, y_2) - x_2^a y_2^b f_2(x, y) = Q_2 (xy_2 - yx_2)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$x^a y^b f_n(x_n, y_n) - x_n^a y_n^b f_n(x, y) = Q_n (xy_n - yx_n),$$

gdzie

$$Q_1, Q_2, , i . Q_n$$

oznaczają funkcyje całkowite. Jeżeli tożsamości te rozmnożymy stronami przez siebie i zważymy, że iloczyn dwóch funkcyj $f_\alpha(x, y)$, $f_\beta(x . y)$ o różnych skazówkach α, β zawiera jako czynnik funkcyję $f(x, y)$, to otrzymamy wypadek w kształcie

$$x^{na} y^{nb} Z - x^{(n-1)a} y^{(n-1)b} x_1^a y_1^b Z_1 f_1(x, y) - x^{(n-1)a} y^{(n-1)b} x_2^a y_2^b Z_2 f_2(x, y) -$$

$$- \dots - x^{(n-1)a} y^{(n-1)b} x_n^a y_n^b Z_n f_n(x, y) + W . f(x, y) =$$

$$Q_1, Q_2 \dots Q_n f(x, y),$$

gdzie W oznacza wyrażenie całkowite. Ściągnąwszy człony, zawierające czynnik $f(x, y)$ i zważywszy, że

$$Z = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} P^2, \quad Z_k = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} PP_k,$$

otrzymamy tożsamość

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} x^{(n-1)a} y^{(n-1)b} PL = Qf(x, y),$$

gdzie dla skrócenia położyłem

$$L = Px^a y^b - P_1 x_1^a y_1^b f_1(x, y) - P_2 x_2^a y_2^b f_2(x, y) - \ldots - P_n x_n^a y_n^b f_n(x, y)$$

$$Q = Q_1 \; Q_2 \ldots Q_n - W.$$

W tej tożsamości Q zniknąć musi tożsamościowo. Ponieważ bowiem lewa strona podzielną jest przez $x^{(n-1)a} y^{(n-1)b}$, przeto Q także te czynniki zawieraćby powinno, co jednak być nie może; gdyż rząd wyrażenia Q co do zmiennych x, y równa się tylko $n(n-2) = (n-1)(a+b)-1$. Jest więc tożsamościowo

$$L = 0,$$

czyli

$$Px^a y^b = P_1 x_1^a y_1^b f_1(x, y) + P_2 x_2^a y_2^b f_2(x, y) + \ldots + P_n x_n^a y_n^b f_n(x, y).$$

Z tej tożsamości bezpośrednio wypływa wzór interpolacyjny Lagrangea, jeżeli tylko zamiast liczb a, b położymy kolejno wartości

$$n-1, 0 \quad n-2, 1 \quad n-3, 2 \ldots\ldots\ldots 0, n-1$$

równania otrzymane rozmnożymy przez spółczynniki jakiejbądź funkcyi całkowitej jednorodnej $(n-1)$tego rzędu,

$$\varphi(x, y) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} y + b_2 x^{n-3} y^2 + \ldots + b_{n-1} y^{n-1}.$$

Otrzymujemy tym sposobem

(3) $$P\varphi(x, y) = P_1 \varphi(x_1, y_1) f_1(x, y) + P_2 \varphi(x_2, y_2) f_2(x, y) + \ldots + P_n \varphi(x_n, y_n) f_n(x, y).$$

Niechaj teraz

$$F(x, y) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 - \ldots \pm a_n y^n$$

oznacza funkcyję całkowitą jednorodną $n$tego rzędu zmiennych x, y, której spółczynniki

$$a_0 \,.\; a_1, \;\ldots\; a_n$$

są dowolnemi zmiennemi, i niechaj f rozwinięte co do zmiennych x, y ma kształt

(4) $$f(x, y) = \Gamma_0 x^n - \Gamma_1 x^{n-1} y + \Gamma_2 x^{n-2} y^2 - \ldots \pm \Gamma_n y^n,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= y_1\, y_2 \,\ldots\, y_n \\
\Gamma_1 &= x_1\, y_2\, y_3 \ldots y_n + x_2\, y_1\, y_3 \ldots y_n + \ldots + x_n\, y_1\, y_2 \ldots y_{n-1} \\
\Gamma_2 &= x_1\, x_2\, y_3 \ldots y_n + x_1 x_3 y_2 y_4 \ldots y_n + \ldots + x_{n-1} x_n y_1 y_2 \ldots y_{n-2} \qquad (5) \\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
\Gamma_n &= x_1\, x_2 \,\ldots\, x_n\,.
\end{aligned}$$

Położywszy we wzorze (3)

$$\varphi(x, y) = \frac{\Gamma_0\, F(x, y) - a_0\, f(x, y)}{y},$$

któreto wyrażenie istotnie jest funkcyją całkowitą jednorodną zmiennych x, y rzędu $(n-1)$go, otrzymujemy po rozmnożeniu przez y

$$P(\Gamma_0 F - a_0 f) = \frac{\Gamma_0}{y_1} P_1\, F(x_1, y_1)\, y f_1(x,y) + \ldots$$
$$+ \frac{\Gamma_0}{y_n} P_n\, F(x_n, z_n)\, y f_n(x,y)\,.$$

W tej tożsamości spółczynniki pojedynczych iloczynów $x^a\, y^b$ muszą się zgadzać po obu stronach, a przeto dla każdej skazówki k od $k = 0$ do $k = n$ mamy równanie kształtu

$$P(\Gamma_0 a_k - a_0 \Gamma_k) = M_1\, F(x_1, y_1) + M_2 F(x_2, y_2) + \ldots + M_n F(x_n, y_n), \quad (6)$$

gdzie

$$M_1,\ M_2,\ \ldots\ M_n$$

oznaczają wyrażenia całkowite zmiennych

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n,\quad y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_n\,.$$

Z równania (6) wynika ogólniejsze równanie

$$P(\Gamma_0^m\, \psi(a_0, a_1, \ldots a_n) - a_0^m\, \psi(\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots \Gamma_n)) = N_1\, F(x_1, y_1) + N_2 F(x_2, y_2) + \ldots \quad (7)$$
$$+ N_n F(x_n, y_n),$$

gdzie ψ oznacza dowolną funkcyję całkowitą jednorodną rzędu $m$tego zmiennych $a_0, a_1, \ldots a_n$, a $N_1, N_2, \ldots$ funkcyje całkowite zmiennych $x_1, x_2, \ldots y_1, y_2, \ldots a_0, a_1, \ldots a_n$. Ponieważ bowiem z powodu jednorodności jest tożsamościowo:

$$\Gamma_0^m\, \psi(a_0, a_1, a_2, \ldots) = \psi(a_0\, \Gamma_0, a_1\, \Gamma_0, a_2\, \Gamma_0, \ldots),$$

przeto położywszy ogólnie

$$\Gamma_0\, a_k - \Gamma_k\, a_0 = w_k\,,$$

otrzymujemy

$$\Gamma_n^m \psi(a_0, a_1, \ldots) = \psi(\Gamma_0 a_0, \Gamma_1 a_0 + w_1, \Gamma_2 a_0 + w_2, \ldots)$$
$$= \psi(\Gamma_0 a_0, \Gamma_1 a_0, \Gamma_2 a_0, \ldots) + w_1 W_1 + w_2 W_2 + \ldots + w_n W_n$$
$$= a_0^m \psi(\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots) + w_1 W_1 + w_2 W_2 + \ldots + w_n W_n,$$

gdzie

$$W_1, W_2, \ldots W_n$$

oznaczają wyrażenia całkowite. Ztąd, zważywszy, że każda z ilości

$$Pw_1, Pw_2, \ldots Pw_n$$

na mocy równania (6) ma kształt

$$M_1 F(x_1, y_1) + M_2 F(x_2, y_2) + \ldots.$$

wnosimy, że tożsamość (7) rzeczywiście istnieje.

3.

Twierdzenie.

„Jeżeli wyrażenie całkowite Φ zmiennych

(8) $$a_0, a_1, \ldots a_n$$
$$x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n,$$

którego rząd co do żadnej ze zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$ nie przekracza liczby $n - 1$, posiada kształt

$$\Phi = M_1 F(x_1, y_1) + M_2 F(x_2, y_2) + \ldots + M_n F(x_n, y_n),$$

gdzie

$$M_1, M_2, \ldots, M_n$$

oznaczają wyrażenia całkowite zmiennych (8), natenczas Φ znika tożsamościowo“.

Dzieląc wyrażenia

$$a_0^\mu M_1, a_0^\mu M_2, \ldots a_0^\mu M_{n-1}$$

przez $F(x_n, y_n)$ względem zmiennej x_n i obrawszy wykładnik μ tak, ażeby a_0 nie zachodziło w mianowniku, możemy położyć

$$a_0^\mu M_1 = Q_1 F(x_n, y_n) + R_1$$
$$a_0^\mu M_2 = Q_2 F(x_n, y_n) + R_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_0^\mu M_{n-1} = Q_{n-1} F(x_n, y_n) + R_{n-1},$$

gdzie

$$R_1, R_2, \ldots R_{n-1}$$

są wyrażeniami całkowitemi nie przekraczającemi rzędu $n-1$ co do x_n a

$$Q_1\,,\quad Q_2\,,\ldots\quad Q_{n-1}$$

wyrażeniami całkowitemi jakiemibądź. Z tych równań wynika, że funkcyja

$$a_0^{\mu}\,\Phi - R_1 F(x_1\,,\,y_1) - R_2 F(x_2\,,\,y_2) - \ldots - R_{n-1}\,F(x_{n-1}\,,\,y_{n-1})$$

tożsamościowo znika, albowiem nie przekracza rzędu $n-1$ co do zmiennej x_n a występuje, z drugiej strony, w kształcie funkcyi podzielnej przez $F(x_n\,,\,y_n)$:

$$[\,a_0^{\mu} M_n + Q_1 F(x_1\,,\,y_1) + \ldots + Q_{n-1}\,F(x_{n-1}\,,\,y_{n-1})\,]\,F(x_n\,,\,y_n).$$

Jest więc

$$a_0^{\mu}\,\Phi = R_1 F(x_1\,,\,y_1) + R_2 F(x_2\,,\,y_2) + \ldots + R_{n-1}\,F(x_{n-1}\,,\,y_{n-1}).$$

Podobnym sposobem położyć można:

$$a_0^{\nu}\,R_1 \quad = N_1 \quad F(x_{n-1}\,,\,y_{n-1}) + S_1$$

$$a_0^{\nu}\,R_2 \quad = N_2 \quad F(x_{n-1}\,,\,y_{n-1}) + S_2$$

$$.\quad .\quad ,\quad .\quad .\quad .$$

$$a_n^{\nu}\,R_{n-2} = N_{n-2}\,F(x_{n-1}\,,\,y_{n-1}) + S_{n-2}\,,$$

gdzie wyrażenia

$$S_1\,,\quad S_2\,,\ldots$$

co do x_{n-1} nie przekraczają rzędu $n-1$, i wnioskować ztąd, że:

$$a_0^{\mu+\nu}\,\Phi = S_1 F(x_1\,,y_1) + S_2 F(x_2\,,y_2) + \ldots + S_{n-2}\,F(x_{n-2}\,,\,y_{n-2})\,.$$

Wnioskując tak dalej, dochodzimy do tożsamości

$$a_0^{\mu+\nu+\,\cdots\,+\sigma}\,\Phi = U_1\;F(x_1\,,\,y_1)\,,$$

z której wynika

$$a_0^{\mu+\nu+\,\cdots\,+\sigma}\,\Phi = 0\,,$$

bo Φ co do zmiennej x_1 rzędu $n-1$ nie przekracza. Jest więc tożsamościwo

$$\Phi = 0\,.$$

4.

Twierdzenie.

„Funkcyja całkowita jednorodna ψ zmiennych

$$a_0\,,\;a_1\,,\;a_2\,,\ldots\;a_n$$

znika tożsamościowo, jeżeli znika za podstawieniem

(9) $$a_0 = \Gamma_0 \, , \; a_1 = \Gamma_1 \, , \; a_2 = \Gamma_2 \, , \ldots \; a_n = \Gamma_n \, ,$$

gdzie

$$\Gamma_0 \, , \; \Gamma_1 \, , \; \Gamma_2 \, , \ldots \; \Gamma_n$$

oznaczają funkcyje elementarne symetryczne (5) złożone z dowolnych zmiennych

$$x_1 \, , \; x_2 \, , \ldots \; x_n \, , \quad y_1 \, , \; y_2 \, , \ldots \; y_n \, .\text{“}$$

Zachodzi bowiem według wzoru (7) tożsamość

$$P\,(\Gamma_0^m\, \psi\,(a_0 \, , \; a_1 \, , \; \ldots \; a_n) - a_0^m\, \psi\,(\Gamma_0 \, , \; \Gamma_1 \, , \; \Gamma_n)\,) =$$

$$N_1\, F\,(x_1 \, , \; y_1) + N_2 F\,(x_2 \, , \; y_2) + \ldots + N_n\, F\,(x_n \, , \; y_n) \, ,$$

jożeli m oznacza rząd wyrażenia ψ. Opuściwszy człon $- P a_0^m\, \psi(\Gamma_0, \ldots \Gamma_n)$ na mocy równania wynikającego z naszego przypuszczenia, że:

$$\psi\,(\Gamma_0 \, , \; \Gamma_1 \, , \ldots \; \Gamma_n) = 0,$$

mamy:

$$\Gamma_0^m\, P\,\psi(a_0, a_1, o_2 \ldots a_n) = N_1\, F\,(x_1, y_1) + N_2 F(x_2, y_2) + \ldots + N_n F\,(x_n \, , \; y_n) \, .$$

Tu lewa strona zawiera zmienne x_1, x_2, ... x_n tylko o tyle, o ile one w P zachodzą, a zatem każdą z nich tylko w rzędzie $n - 1$. Musi więc według §. 3 być

$$\Gamma_0^m\, P \psi\,(a_0 \, , \; a_1 \, , \ldots) = 0$$

a zatem także

$$\psi(a_0 \, , \; a_1 \, , \; . \, , . \; a_n) = 0.$$

Jeżeli więc równanie całkowite jednorodne co do zmiennych a_0, a_1, a_2, ... a_n o spółczynnikach niezawisłych od zmiennych x_1, x_2, ... jest spełnionem, kiedy się robi podstawienia (9), to i pierwotnie musi być spełnionem.

5.

Twierdzenie.

„Wyrażenie całkowite jednorodne ψ zmiennych

$$a_0 \, , \; a_1 \, , \; \ldots \; a_n$$

zawierać musi czynnik a_0, jeżeli za podstawieniem

$$a_0 = \Gamma_0 \, , \; a_1 = \Gamma_1 \, , \; \ldots \; a_n = \Gamma_n$$

staje się podzielnem przez y_n“.

Połóżmy

$$f_n(x, y) = (xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2) \dots (xy_{n-1} - yx_{n-1})$$
$$= \Delta_0 x^{n-1} - \Delta_1 x^{n-2} y + \dots \pm \Delta_{n-1} y^{n-1}.$$

Ponieważ ztąd wynika:

$$-y f_n(x, y) = -\Delta_0 x^{n-1} y + \Delta_1 x^{n-2} y^2 - \dots \mp \Delta_{n-1} y^n,$$

przeto widocznem jest na mocy tożsamości (4), że wyrażenia elementarne symetryczne

$$\Gamma_0, \Gamma_1, \dots \Gamma_n$$

przez podstawienie

$$x_n = 1 \quad y_n = 0$$

przechodzą względnie na

$$0, \Delta_0, \Delta_1 \dots \Delta_{n-1}.$$

Jeżeli teraz położymy

$$\psi = a_0 \varphi + \chi,$$

gdzie χ nie zawiera zmiennej a_0, to z założenia mamy:

$$\psi(\Gamma_0, \Gamma_1 \dots) = \Gamma_0 \varphi(\Gamma_0, \Gamma_1, \dots) + \chi(\Gamma_0, \Gamma_1, \dots)$$
$$= y_n W.$$

Kładąc w tej tożsamości

$$x_n = 1 \quad y_n = 0$$

wnioskujemy, że:

$$\chi(\Delta_0, \Delta_1, \dots \Delta_{n-1}) = 0.$$

Wyrażenie zatem χ, na mocy §. 4, tożsamościowo musi być równem zeru i mamy

$$\psi = a_0 \varphi.$$

6.

Twierdzenie zasadnicze w teoryi funkcyj symetrycznych tak wypowiedzieć można.

„Jeżeli S oznacza wyrażenie całkowite zmiennych

$$x_1, x_2, \dots x_n \quad y_1, y_2, \dots y_n,$$

o spółczynnikach całkowitych, które co do n par zmiennych

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n) \qquad (10)$$

jest symetrycznem i co do ilości każdej pary z osobna jednorodnem, to utworzyć można wyrażenie całkowite i jednorodne zmiennych

$$a_0, a_1, \dots a_n$$

o spółczynnikach całkowitych, które za podstawieniem

$$a_0 = \Gamma_0 \quad a_1 = \Gamma_1 \quad \dots \quad a_n = \Gamma_n$$

przechodzi na S. Takie wyrażenie tylko jedno istnieje".

Jeżeli istnieje funkcyja całkowita jednorodna $\psi(a_0, a_1, \dots a_n)$, która spełnia tożsamość:

(11) $$\psi(\Gamma_0, \Gamma_1, \dots \Gamma_n) = S,$$

to na mocy tożsamości (7) będzie:

$$P(\Gamma_0^m \psi(a_0, a_1 \dots) - a_0^m \psi(\Gamma_0, \Gamma_1, \dots)) = N_1 F(x_1, y_1) + \dots + N_n F(x_n, y_n)$$

czyli

(12) $$P(\Gamma_0^m \psi(a_0, a_1, \dots) - a_0^m S) = N_1 F(x_1, y_1) + \dots + N_n F(x_n, y_n),$$

gdzie m oznacza rząd wyrażenia ψ, który zarazem musi być rzędem funkcyi symetrycznej S co do zmiennych każdej z par (10).

Przez szereg dzieleń algiebraicznych wyrażenie $a_0^\nu PS$ sprowadzić się daje do kształtu:

(13) $$a_0^\nu PS = R + M_1 F(x_1, y_1) + M_2 F(x_2, y_2) + \dots + M_n F(x_n, y_n),$$

gdzie R co do żadnej ze zmiennych $x_1, x_2, \dots x_n$ nie przekracza rzędu $n-1$, a

$$M_1, M_2 \dots M_n$$

oznaczają wyrażenia całkowite i gdzie zarazem wykładnik ν tak może być dobranym, aby a_0 tylko w potęgach o wykładnikach nieujemnych zachodziło. Dzieląc bowiem najprzód przez $F(x_n, y_n)$ otrzymujemy pierwszą resztę nieprzekraczającą rzędu $n-1$ co do x_n; dzieląc potem tę resztę przez $F(x_{n-1}, y_{n-1})$ dochodzimy do drugiej reszty nieprzekraczającej rzędu $n-1$ ani co do x_n, ani co do x_{n-1} i t. d. Mamy więc, przypuściwszy $\nu \geq m$, (co wolno), na mocy tożsamości powyżej stojących:

$$Pa_0^{\nu-m}\Gamma_0^m\psi(a_0, a_1) - R = (M_1 + a_0^{\nu-m}N_1)F(x_1, y_1) + (M_2 + a_0^{\nu-m}N_2)F(x_2, y_2) + \dots$$
$$+ (M_n + a_0^{\nu-m}N_n)F(x_n, y_n),$$

a ztąd na mocy twierdzenia §. 3

$$P\Gamma_0^m a_0^{\nu-m}\psi(a_0, a_1, \dots a_n) - R = 0.$$

Reszta więc R podzielną być musi przez $P\Gamma_0^m a_0^{\nu-m}$ a iloraz daje wyrażenie ψ.

Wnioski te wskazują drogę do utworzenia funkcyj ψ. Należy się tylko odwrotnie przekonać, czy reszta R jest istotnie podzielną przez $P\Gamma_0^m a_0^{\nu-m}$ i czy iloraz spełnia tożsamość (11).

Przestawmy w tym celu w tożsamości (13) dwie jakiebądź pary zmiennych (x_α, y_α) i (x_β, y_β), przez co wyrażenia:

$$R, M_1, M_2, \ldots M_\alpha, \ldots M_\beta, \ldots$$

niechaj przejdą odpowiednio na

$$R', M'_1, M'_2, \ldots M'_\beta, \ldots M'_\alpha, \ldots$$

Ponieważ P zmienia tylko znak swój a S zostaje niezmienionem, otrzymamy tożsamość:

$$-a_0^\nu PS = R' + M'_1 F(x_1, y_1) + M'_2 F(x_2, y_2) + \ldots + M'_n F(x_n, y_n),$$

która dodana do (13) daje

$$R + R' = -(M_1 + M'_1) F(x_1, y_1) - (M_2 + M'_2) F(x_2, y_2) - \ldots$$

Na mocy twierdzenia §. 3 musi więc być tożsamościowo

$$R + R' = 0.$$

Wyrażenie R zatem znika za podstawieniem:

$$x_\beta = x_\alpha \qquad y_\beta = y_\alpha$$

i musi przeto zawierać czynnik $x_\alpha y_\beta - x_\beta y_\alpha$, a ponieważ wniosek ten odnosi się do każdej pary skazówek $\alpha\beta$ szeregu $1, 2, \ldots n$, widocznem jest, że R zawierać musi każdy czynnik iloczynu odmieniającego (alternującego) P. Możemy więc położyć

$$R = PQ, \tag{14}$$

gdzie Q oznacza wyrażenie całkowite. Wyrażenie to nie może już zawierać zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$, ponieważ P jest rzędu $n-1$ co do każdej z tych zmiennych. Q więc tylko już zawierać może zmienne

$$y_1, y_2, \ldots y_n, \quad a_0, a_1, \ldots a_n.$$

Ponieważ nadto R musi być jednorodnem rzędu $m+n-1$ co do zmiennych każdej z par (10), przeto Q musi być podzielnem przez $y_1^m, y_2^m, \ldots y_n^m$ czyli Γ_0^m. Można więc dalej położyć

$$Q = \Gamma_0^m \varphi, \tag{15}$$

gdzie φ oznacza funkcyję całkowitą jednorodną samych zmiennych

$$a_0, a_1, \dots a_n.$$

Funkcyja ta może mieć tylko spółczynniki całkowite, ponieważ przez dzielenia, które do R i Q prowadzą, nie może być wprowadzonym żaden ułamek liczebny, w żadnym bowiem z dzielników użytych potęga najwyższa zmiennej nie posiada czynnika liczebnego różnego od jedności.

Na mocy równań (14), (15), tożsamość (13) przechodzi na

$$P(a_0^\nu S - \Gamma_0^m \varphi) = M_1 F(x_1, y_1) + \dots + M_n F(x_n, y_n)$$

i za podstawieniem

$$a_0 = \Gamma_0 \quad a_1 = \Gamma_1 \quad \dots \quad a_n = \Gamma_n$$

otrzymujemy

$$P(\Gamma_0^\nu S - \Gamma_0^m \varphi(\Gamma_0, \Gamma_1, \dots)) = 0$$

czyli

(16) $$\Gamma_0^\nu S = \Gamma_0^m \varphi(\Gamma_0, \Gamma_1, \dots).$$

Jeżeli $\nu > m$, to $\varphi(\Gamma_0, \Gamma_1, \dots)$ zawiera czynnik $\Gamma_0^{\nu-m}$, i na mocy twierdzenia §. 5 wnosimy, że φ podzielnem być musi przez $a_0^{\nu-m}$. Położywszy więc

$$\varphi = a_0^{\nu-m} \psi,$$

otrzymujemy z (16)

$$\psi(\Gamma_0, \Gamma_1, \dots \Gamma_n) = S.$$

Gdyby istniało drugie wyrażenie $\psi'(a_0, a_1, \dots)$ spełniające tożsamość

$$\psi'(\Gamma_0, \Gamma_1, \dots \Gamma_n) = S,$$

to z równania

$$\psi'(\Gamma_0, \Gamma_1, \dots) = \psi(\Gamma_0, \Gamma_1, \dots)$$

na mocy twierdzenia §. 4 wnosimy, że

$$\psi'(a_0, a_1, \dots) = \psi(a_0, a_1, \dots).$$

Wyrażenia zatem ψ i ψ' różnić się nie mogą.

7.

Ażeby twierdzenie ustępu poprzedzającego otrzymać dla funkcyj całkowitych symetrycznych S, zawierających n zmiennych

$$x_1, x_2, \dots x_n,$$

wystarcza położyć

$$y_1 = y_2 = \dots = y_n = 1.$$

Położywszy tedy dla skrócenia

$$\begin{aligned}\Delta = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n) \\ (x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad , \\ (x_{n-1} - x_n)\end{aligned}$$

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) = x^n - \Gamma_1 x^{n-1} + \Gamma_2 x^{n-2} - \dots \pm \Gamma_n$$

$$F(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots \pm a_n ,$$

gdzie

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \Gamma_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Gamma_n &= x_1 x_2 \dots x_n ,\end{aligned}$$

mamy do przerobienia funkcyi symetrycznej S prawidło następujące:

Sprowadźmy iloczyn $x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1} S$ za pomocą po kolei użytych dzielników

$$F(x_1), \quad F(x_2), \dots \quad F(x_n)$$

do kształtu

$$R + M_1 F(x_1) + M_2 F(x_2) + \dots + M_n F(x_n) ,$$

gdzie R co do żadnej zmiennej $x_1, x_2, \dots x_n$ nie przekracza rzędu $n-1$, a

$$M_1 , \quad M_2 , \dots M_n$$

oznaczają wyrażenia całkowite; i oznaczmy w R człon zawierający iloczyn $x_1^\alpha x_2^\beta \dots x_n^\nu$, w którym wykładniki $\alpha, \beta, \dots \nu$ bez względu na porządek mają być liczbami $0, 1, 2, \dots n-1$, przez

$$A_{\alpha\beta\dots\nu}\, x_1^\alpha x_2^\beta \dots x_n^\nu .$$

Natenczas będzie

$$\psi(a_1 , a_2 , \dots a_n) = \Sigma \pm A_{\alpha\beta\dots\nu}$$

$$S = \psi(\Gamma_1 , \Gamma_2 , \dots \Gamma_n) ,$$

gdzie znak sumy odnosi się do wszystkich przemian $\alpha\beta \dots \nu$ liczb

$$0 , 1 , 2 , \dots n-1$$

a znak $\pm$ do klasy każdorazowej przemiany jak przy tworzeniu wyznacznika.

Aby prawidło to uzasadnić, wystarcza w tożsamości:

$$x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1} S = R + M_1 F(x_1) + M_2 F(x_2) + \dots$$

uskutecznić wszelkie możliwe przemiany zmiennych $x_1, x_2, \dots x_n$ i utworzyć sumę wypadków wziętych ze znakiem $\pm$, odpowiadającym klasie każdorazowej przemiany. W sumie tej S występuje ze spółczynnikiem Δ, jakiebądź wyrażenie $A_{\alpha\beta\dots\nu}$ ze spółczynnikiem $\pm\Delta$, gdzie znak $\pm$ odpowiada klasie przemiany $\alpha\beta\dots\nu$, a człony wyrażenia R, zawierające iloczyn $x_1^\alpha x_2^\beta \dots x_n^\nu$, którego wykładniki nie są wszystkie pomiędzy sobą różne, zupełnie się znoszą. Będzie więc

$$(17) \qquad \begin{aligned} \Delta S &= \Delta \Sigma \pm A_{\alpha\beta\dots\nu} + N_1 F(x_1) + N_2 F(x_2) + \dots \\ &= \Delta \psi(a_1, a_2, \dots a_n) + N_1 F(x_1) + \dots \end{aligned}$$

a ztąd gdy podstawimy

$$a_1 = \Gamma_1 \quad a_2 = \Gamma_2 \quad \dots \quad a_n = \Gamma_n$$

otrzymujemy

$$\Delta S = \Delta \psi(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots)$$
$$S = \psi(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots \Gamma_n).$$

Oznaczywszy przez $[\varphi]_{\frac{1}{x_1^n x_2^{n-1} \dots x_n}}$ spółczynnik iloczynu $\frac{1}{x_1^n x_2^{n-1} \dots x^n}$ w rozwinięciu funkcyj φ według potęg malejących zmiennych $x_1, x_2, \dots$, i zważywszy, że

$$\left(\frac{\Delta}{F(x_1) F(x_2) \dots F(x_n)}\right)_{\frac{1}{x_1^n x_2^{n-1} \dots x_n}} = 1,$$

możemy także na mocy tożsamości (17) położyć

$$\psi = \left[\frac{S\Delta}{F(x_1) F(x_2) \dots F(x_n)}\right]_{\frac{1}{x_1^n x_2^{n-1} \dots x_n}}.$$

8.

Jezeli przez

$$s = \Sigma x_1^a x_2^b \dots x_n^e$$

oznaczymy sumę różnych wartości, które wyrażenie $x_1^a x_2^b \dots x_n^e$ przybiera przez wszystkie możliwe przemiany zmiennych $x_1, x_2, \dots x_n$, to wiadomo, że każda funkcyja całkowita symetryczna rzeczonych zmiennych da się linijowo złożyć z sum s. Sumy s zaś w następujący sposób wyprowadzić można.

Jeżeli żaden z wykładników $a, b, \ldots e$ nie przekracza liczby m i położymy

$$G(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_m x^m,$$

rozumiejąc przez

$$u_0, u_1, u_2, \ldots u_m$$

zmienne dowolne, to suma s występuje jako spółczynnik iloczynu

$$u_a u_b \ldots u_e$$

w rozwinięciu iloczynu

$$W = G(x_1) G(x_2) \ldots G(x_n).$$

Iloczyn ten zaś czyli wyniknik funkcyi G i

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = x^n - \Gamma_1 x^{n-1} + \ldots \pm \Gamma_n$$

w następujący sposób przerobić można na funkcyję wyrażeń elementarnych symetrycznych

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_n.$$

Mamy, mnożąc równanie

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & x_1^2, \ldots & x_1^{n-1} \\ 1, & x_2, & x_2^2, \ldots & x_2^{n-1} \\ . & . & . & . \\ 1, & x_n, & x_n^2, \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

przez iloczyn W

$$\Delta W = \begin{vmatrix} G(x_1), & x_1 G(x_1), & x_1^2 G(x_1), \ldots & x_1^{n-1} G(x_1) \\ G(x_2), & x_2 G(x_2), & x_2^2 G(x_2), \ldots & x_2^{n-1} G(x_2) \\ . & . & . & . \\ G(x_n), & x_n G(x_n), & x_n^2 G(x_n), \ldots & x_n^{n-1} G(x_n) \end{vmatrix}.$$

Jeżeli teraz wyrażenie $x^\nu G(x)$ przez dzielenie sprowadzimy do kształtu

$$x^\nu G(x) = Qf(x) + R_\nu(x),$$
$$= Qf(x) + r_{\nu 0} + r_{\nu 1} x + r_{\nu 2} x^2 + \ldots + r_{\nu\, n-1} x^{n-1},$$

to będzie

$$\Delta W = \begin{vmatrix} R_0(x_1), & R_1(x_1), \ldots & R_{n-1}(x_1) \\ R_0(x_2), & R_1(x_2), \ldots & R_{n-1}(x_2) \\ . & . & . \\ R_0(x_n), & R_1(x_n), \ldots & R_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$$

a ztąd według prawidła na mnożenie wyznaczników

$$W = \begin{vmatrix} r_{00} & r_{01} & \dots & r_{0\,n-1} \\ r_{10} & r_{11} & \dots & r_{1\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n-1\,0} & r_{n-1\,1} & \dots & r_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}.$$

9.

Niechaj dla skrócenia będzie

$$\begin{aligned} \Delta = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 & - x_n) \\ (x_2 - x_3) \dots (x_2 & - x_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \\ (x_{n-1} & - x_n) \end{aligned}$$

$$\omega_k = ux_k + vy_k + \dots + wz_k$$

(18) $$x_k^a y_k^b \dots z_k^e = T_k ,$$

gdzie a, b, ... e oznaczają wykładniki całkowite nieujemne. Nazwijmy spółczynniki występujące w rozwinięciu wyrażenia

(19) $$(x + \omega_1)(x + \omega_2) \dots (x + \omega_n) - x^n$$

według zmiennych

$$x, u, v, \dots w$$

ogólnie spółczynnikami Ω. Sąto funkcyje całkowite i symetryczne n grup zmiennych

(20) $$\begin{matrix} (x_1, y_1, \dots z_1) \\ (x_2, y_2, \dots, z_2) \\ \cdot \quad \cdot \quad , \\ (x_n, y_n, \dots z_n), \end{matrix}$$

t. j. funkcyje całkowite zmiennych, zawartych w tych n grupach, które się identycznie nie zmieniają, kiedy grupy rzeczone na jakibądź sposób przemieniamy.

Funkcyja symetryczna kształtu

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_n,$$

w której T_1, T_2, ... T_n odnoszą się do tych samych wykładników a, b, ... e, w następujący sposób da się przerobić na funkcyję całkowitą spółczynników Ω.

Połóżmy

$$a + b + \dots + e = m$$

i przedstawmy sumę

$$\omega_1^m + \omega_2^m \ldots + \omega_n^m$$

za pomocą wzorów Girarda-Newtona jako funkcyję całkowitą wyrażeń

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$$
$$\omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 + \ldots + \omega_{n-1}\omega_n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\omega_1\omega_2, \ldots \omega_n,$$

które jako spółczynniki różnych potęg zmiennej x w rozwinięciu funkcyi (19) są funkcyjami linijowemi spółczynników Ω. Możemy więc położyć

$$\omega_1^m + + \omega_2^m + \ldots + \omega_n^m = \varphi,$$

gdzie φ oznacza funkcyję całkowitą wiadomą zmiennych $u, v, \ldots w$ i spółczynników Ω. Jeżeli teraz lewą stronę tej tożsamości rozwiniemy według zmiennych $u, v, \ldots w$, to spółczynnik iloczynu $u^a v^b \ldots w^e$ równa się $\frac{m!}{a!\,b!\ldots e!}T$. Oznaczywszy zatem spółczynnik tego samego iloczynu we funkcyi φ przez A, mamy

$$T = \frac{a!\,b!\ldots e!}{m!}A. \tag{21}$$

10.

Twierdzenie.

„Funkcyja całkowita zmiennych (20) rozmnożona przez Δ, daje się wyrazić całkowicie przez spółczynniki Ω i zmienne $x_1, x_2, \ldots x_n$".

Weźmy na uwagę równania

$$\begin{aligned}
T_1 + T_2 + \ldots + T_n &= A \\
x_1 T_1 + x_2 T_2 + \ldots + x_n T_n &= A_1 \\
x_1^2 T_1 + x_2^2 T_2 + \ldots + x_n^2 T_n &= A_2 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \\
x_1^{n-1} T_1 + x_2^{n-1} T_2 + \ldots + x_n^{n-1} T_n &= A_{n-1},
\end{aligned}$$

w których

$$T_1, T_2, \ldots T_n$$

są iloczynami kształtu (18) o tych samych wykładnikach $a, b, \ldots e$ i których prawe strony

$$A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$$

na mocy tożsamości (21) będą funkcyjami całkowitemi znanemi spółczynników Ω. Rozwiążmy pierwsze m z tych równań co do T_m. W tym celu należy je rozmnożyć odpowiednio przez spółczynniki funkcyi

$$\psi_m(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)}{x-x_m}$$

i dodać. Po dodaniu odpadają niewiadome

$$T_1, \quad T_2, \dots \quad T_{m-1}$$

i otrzymujemy

$$\psi_m(x_m)\,T_m = L_0^{(m)} + L_1^{(m)}\,T_{m+1} + \dots + L_{n-m}^{(m)}\,T_n\,,$$

gdzie

$$L_0^{(m)}, \quad L_1^{(m)}, \dots \quad L_{n-m}^{(m)}$$

oznaczają wiadome funkcyje całkowite zmiennych $x_1, x_2, \dots$ i spółczynników Ω.

Mamy zatem równania

$$\begin{aligned} &\psi_1(x_1)\,T_1 = L_0^{(1)} + L_1^{(1)}\,T_2 + L_2^{(1)}\,T_3 + \dots + L_{n-1}^{(1)}\,T_n \\ (22)\qquad &\psi_2(x_2)\,T_2 = L_0^{(2)} + L_1^{(2)}\,T_3 + \dots + L_{n-2}^{(2)}\,T_n \\ &\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &\psi_n(x_n)\,T_n = L_0^{(n)}, \end{aligned}$$

za pomocą których jakibądź iloczyn

$$J = \Delta\,T_1\,T_2 \dots T_n$$

przerobić możemy na funkcyję całkowitą spółczynników Ω i zmiennych $x_1, x_2, \dots x_n$.

Zważywszy bowiem, że

$$\Delta = \pm\,\psi_1(x_1)\,\psi_2(x_2)\dots\psi_n(x_n)$$

i że iloczyn dwóch wyrażeń T_k znowu stanowi wyrażenie T_k, chociaż o innych wykładnikach, możemy najprzód z iloczynu J czynniki $\psi_1(x_1)\,T_1$ za pomocą pierwszego ze zrównań (22) wyrugować, przez co iloczyn J przechodzi na sumę członków kształtu

$$H\,\psi_2(x_2)\,\psi_3(x_3)\dots\psi_n(x_n)\,T_2\,T_3\dots T_n\,,$$

gdzie H oznacza funkcyję całkowitą spółczynników Ω i zmiennych $x_1, x_2, \dots x_n$. Następnie z każdego z tych członów możemy czynniki

$\psi_2(x_2)\,T_2$ wyrugować, za pomocą drugiego z równań (22) i otrzymujemy na J sumę członów kształtu

$$H\,\psi_3(x_3)\;.\;.\;\psi_n(x_n)\,T_3\;.\;.\;.\;T_n.$$

Postępując tak dalej, dochodzimy do członów kształtu

$$H\,\psi_n(x_n)\,T_n\,,$$

które za pomocą ostatniego z równań (22) na funkcyje całkowite zmiennych $x_1, x_2, \ldots$ i spółczynników Ω przerobić możemy.

Ponieważ zaś najogólniejsza funkcyja całkowita Θ zmiennych (20) występuje jako suma członów kształtu

$$c\,T_1\;T_2\ldots T_n\,,$$

gdzie c oznacza spółczynnik niezawisły od rzeczonych zmiennych, przeto także ogólnie położyć możemy

$$\Delta\,\Theta = \Phi\,(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (23)$$

gdzie Φ oznacza funkcyję całkowitą zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$ i spółczynników Ω.

Funkcyję tę Φ nadto przypuścić możemy jako rzędu niższego od $n$tego względem każdej ze zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$. Położywszy bowiem w wyrażeniu (19)

$$u = -1 \quad v = \omega = \ldots = 0,$$

otrzymamy iloczyn

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

którego spółczynniki należą do spółczynników Ω i który daje dla każdej skazówki k

$$x_k^{n+\nu} - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x_k^{n+\nu-1} + (x_1x_2 + \ldots)x_k^{n+\nu-2} - \ldots \pm x_1x_2\ldots x_n . x_k^{\nu} = 0.$$

Te równania pozwalają nam potęgi zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$ wyższe od $(n-1)$tej zniżyć do potęg $0, 1, \ldots n-1$.

Jeżeli w szczególności Θ jest funkcyją symetryczną grup (20) i w tożsamości (23) uskutecznimy na nich jakąbądź przemianę, to otrzymujemy

$$\pm\,\Delta\,\Theta = \Phi\,(x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\nu),$$

gdzie znak $\pm$ odnosi się do klasy przemiany $\alpha\beta\ldots\nu$ skazówek $1, 2, \ldots n$. Mamy zatem także

$$\Delta\,\Theta = \pm\,\Phi\,(x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\nu)$$

a ztąd

$$n!\,\Delta\,\Theta = \Sigma \pm \Phi\,(x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\varepsilon),$$

gdzie znak sumowania odnosi się do wszystkich możliwych przemian $\alpha\beta \ldots \nu$ skazówek $1, 2, \ldots n$. Ponieważ suma taka dla najogólniejszej funkcyi całkowitej podzielną jest przez iloczyn alternujący Δ, przeto położyć możemy

$$\Sigma \pm \Phi\,(x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\varepsilon) = \Delta\, Q,$$

gdzie Q już nie zawiera zmiennych $x_1, x_2, \ldots x_n$ poza spółczynnikami Ω i otrzymujemy

$$\Theta = \frac{1}{n!}\, Q.$$

Funkcyję całkowitą symetryczną można więc zawsze przerobić na funkcyję całkowitą spółczynników Ω.